

# **MECÁNICA DE SÓLIDOS**

**Curso 2017/18**

**Titulación:**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

## **Tema 3 – Plasticidad**

**Profesores:**

**Jorge Zahr Viñuela**

**José Antonio Rodríguez Martínez**

# ***Tema 3***

## **Plasticidad**

**3.1 CUESTIONES PREVIAS**

**3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**

**3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**

**3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD**

**3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

# ***Tema 3***

## **Plasticidad**

**3.1 CUESTIONES PREVIAS**

**3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**

**3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**

**3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD**

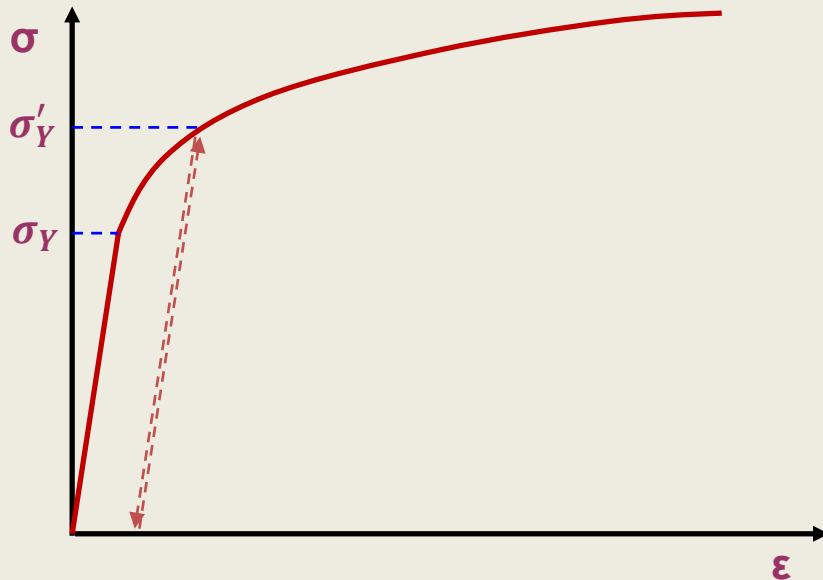
**3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

### **3.3 – CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN PLÁSTICA**

#### **CONTENIDOS**

- 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación**
- 3.3.2 Descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales**
- 3.3.3 Descripción Analítica del Proceso de Endurecimiento**
- 3.3.4 Caracterización Experimental del Endurecimiento por Deformación**

### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación



En un estado de tensiones **uniaxial** (por ejemplo, ensayo de tracción o de compresión simples), varios materiales verifican **experimentalmente** los siguientes hechos:

- El **límite elástico** (o tensión de fluencia) del material **augmenta** con la deformación.
- Este aumento del límite elástico se denomina **endurecimiento por deformación**.
- En un **proceso de descarga** (en el que no se producen variaciones en la deformación plástica) el **límite elástico no varía** (no hay endurecimiento).
- El **aumento del límite elástico**, se relaciona esencialmente con una **variación de la deformación plástica**, de cualquier signo.

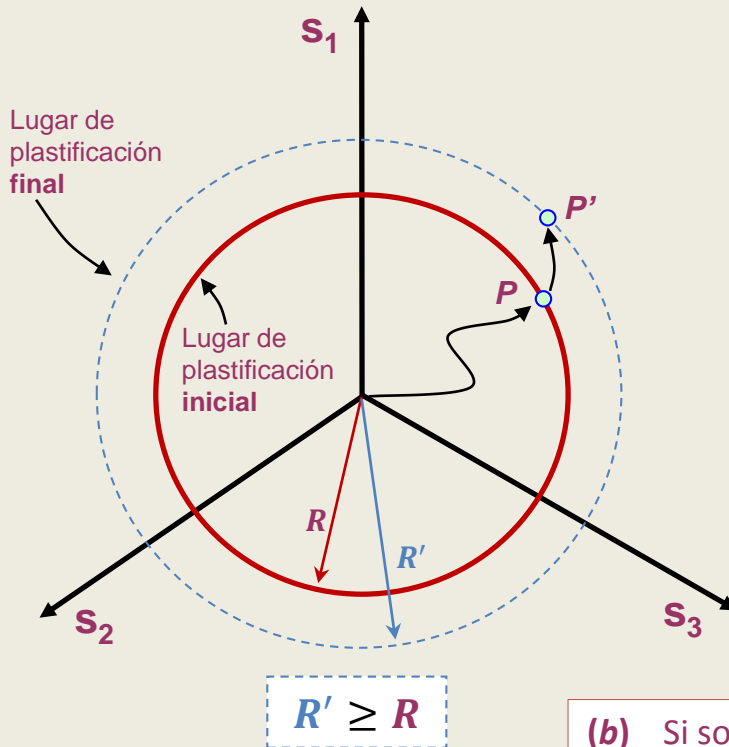
En un estado de tensiones **multiaxial** (en el que la noción de **límite elástico** es generalizada por el concepto de **lugar de plastificación**), tiene lugar **endurecimiento por deformación** en aquellos pasos del proceso de carga en los que, **simultáneamente**:

- se satisface el criterio de plastificación y
- varía la deformación plástica.

El **límite elástico** (y por tanto, el **lugar de plastificación**) depende, pues, de **toda la historia de deformaciones plásticas** del material.

El límite elástico, sin embargo, no varía en descargas.

### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación



#### EJEMPLO

Si un material cuyo **instante de plastificación inicial** obedece al **Criterio de von Mises** es capaz de experimentar **endurecimiento por deformación plástica**, entonces:

¿Cómo **varía** el **lugar de plastificación** durante el proceso de endurecimiento?

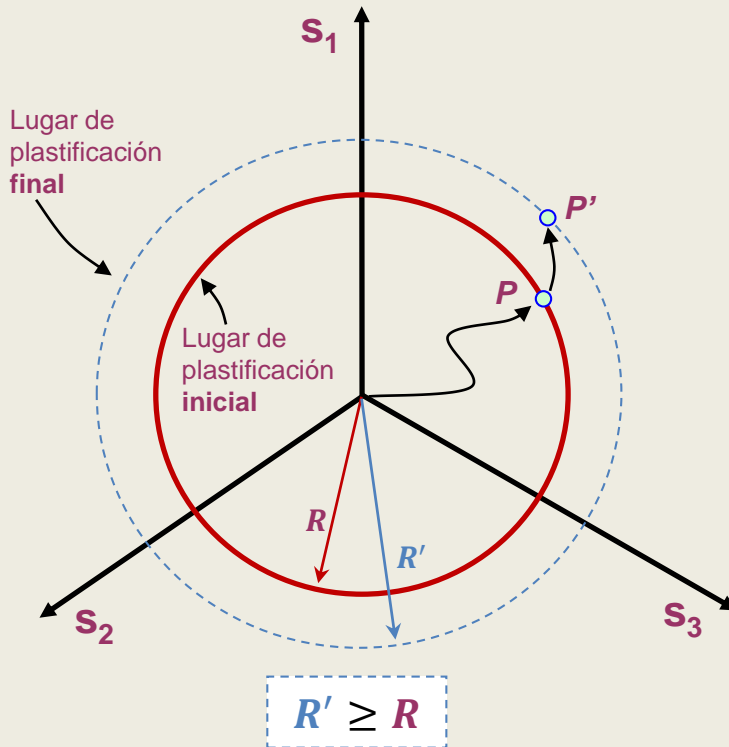
(a) Sea ***P*** un punto al que se ha llegado siguiendo un camino de tensiones dado, y en el que ***se satisface el criterio de plastificación***.

(b) Si sobre el material se impone ***nueva deformación plástica*** a partir de ***P***, y el material endurece por deformación, este endurecimiento se traduce en una ***expansión*** del ***lugar de plastificación***.

(c) Frente a este ***incremento*** de ***deformación plástica***, el estado tensional pasa, entonces, desde ***P*** a ***P'***.

(d) Si se supone que el proceso de ***endurecimiento*** es ***isótropo***, el lugar de plastificación se expande en ***todas las direcciones***: no varía de forma aunque sí de tamaño

### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación



#### EJEMPLO (continuación)

Si un material cuyo **instante de plastificación inicial** obedece al **Criterio de von Mises** es capaz de experimentar **endurecimiento por deformación plástica**, entonces:

¿Cómo **varía** el **lugar de plastificación** durante el proceso de endurecimiento?

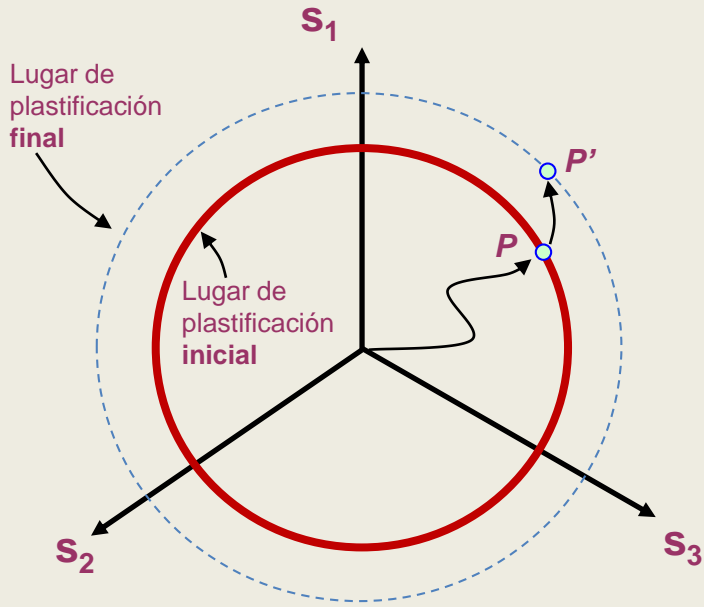
- (e) Si durante la historia de cargas **no** se ha producido **ninguna descarga**, el tamaño del lugar de plastificación es función del estado tensional final.
- (f) Es decir, independientemente del camino de tensiones seguido, el lugar de plastificación irá  **aumentando de tamaño**  siguiendo  **un solo parámetro**  (por ej., el radio de la circunferencia), que es función del  **estado tensional final** .



**Dos Lugares de Plastificación Distintos No Pueden, en Consecuencia, Tener Ningún Punto en Común**

**RESULTA NECESARIA UNA DESCRIPCIÓN ANALÍTICA DE LA EVOLUCIÓN DE LA SUPERFICIE DE PLASTIFICACIÓN**

### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación



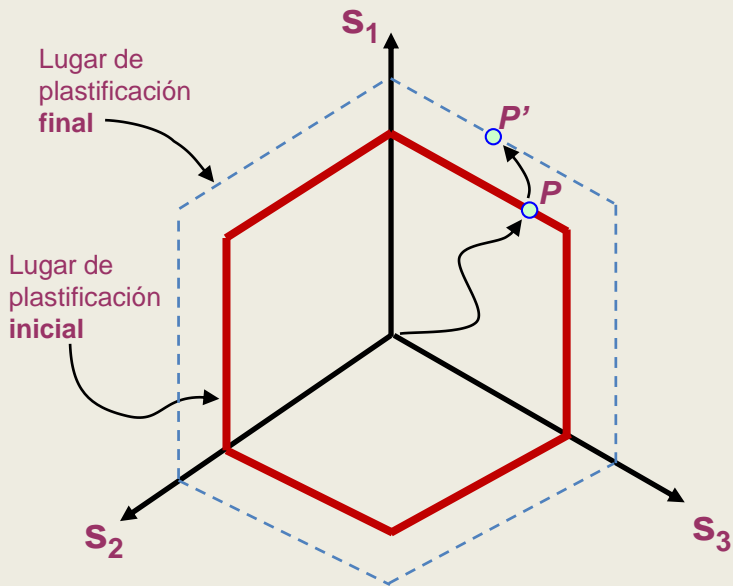
#### OBSERVACIÓN – ENDURECIMIENTO ISÓTROPICO:

En el ejemplo anterior se indicó que el proceso de endurecimiento resultó en una **expansión uniforme** del **lugar de plastificación** (que correspondía a la circunferencia de von Mises).

Si el criterio de plastificación del ejemplo hubiese sido, en cambio, el **Criterio de Tresca**, también podría imaginarse un proceso de endurecimiento que resulta en una **expansión uniforme** del **hexágono de Tresca**.

#### Esto es lo que se conoce como ENDURECIMIENTO ISÓTROPICO:

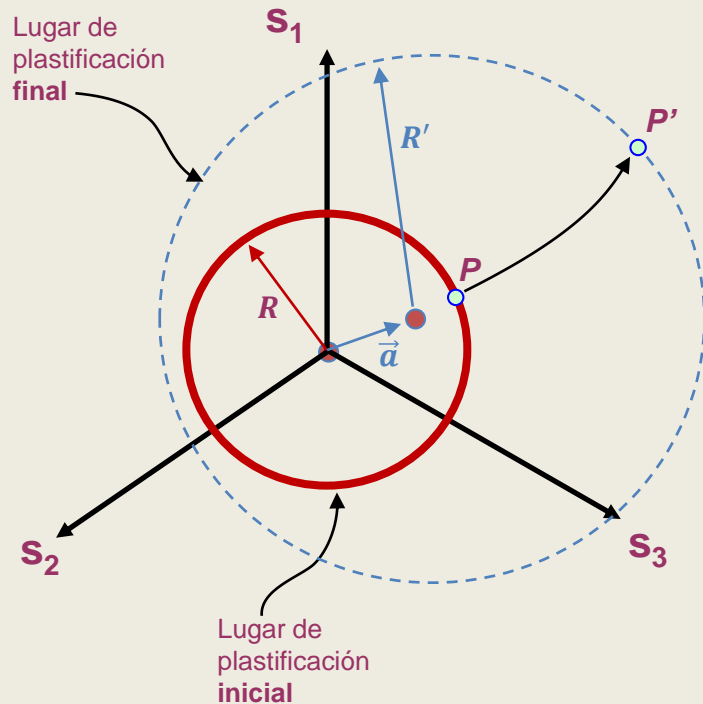
es un tipo de endurecimiento en el que el lugar de plastificación **umenta de tamaño, sin cambiar su forma**, ni su **“centro”** en el espacio de tensiones.



Si un material experimenta ENDURECIMIENTO ISÓTROPICO, entonces se preserva el **tipo** de criterio de plastificación durante el proceso de endurecimiento.



### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación



#### OBSERVACIÓN – ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO:

Es posible también imaginar un proceso de endurecimiento en el que lo que cambia **no** es el **tamaño** del lugar de plastificación, sino su "**centro**" en el espacio de tensiones principales

En tal caso, se habla de ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO.

- Ciertos materiales pueden exhibir una **combinación** de endurecimiento ISÓTROPO y CINEMÁTICO, tal como en la figura de la izquierda.
- El "**tipo**" de endurecimiento que experimenta una material debe ser considerado como una **propiedad** del material.

#### Para ENDURECIMIENTO COMBINADO:

Se requiere describir analíticamente cómo evolucionan el **centro** y el **tamaño** del Lugar de Plastificación con el estado tensional:

$$R' = R(P')$$

$$\vec{a} = \vec{a}(P')$$

### 3.3.1 Concepto de Endurecimiento por Deformación

---

En lo que sigue, nos centraremos en la descripción de *leyes analíticas* para materiales que muestran únicamente ENDURECIMIENTO ISÓTROPO.

Es decir, describiremos el *cambio de tamaño* del lugar de plastificación en función del estado tensional.

Antes de esto, con el propósito de ilustrar qué se entiende como “*producción de deformación plástica*”, se presentará dos posibles descomposiciones aditivas del tensor de deformaciones plásticas.

### 3.3.2 Descomposición aditiva del tensor de deformaciones

Consideremos el tensor de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , de componentes  $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$

Descomposición del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en sus componentes **elástica** y **plástica**:

Tensorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$$

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^{el.vol} + \boldsymbol{e}^{el} \quad \quad \quad \frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl.vol} + \boldsymbol{e}^{pl}$$

En metales dúctiles:  
 $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl.vol} = 0$

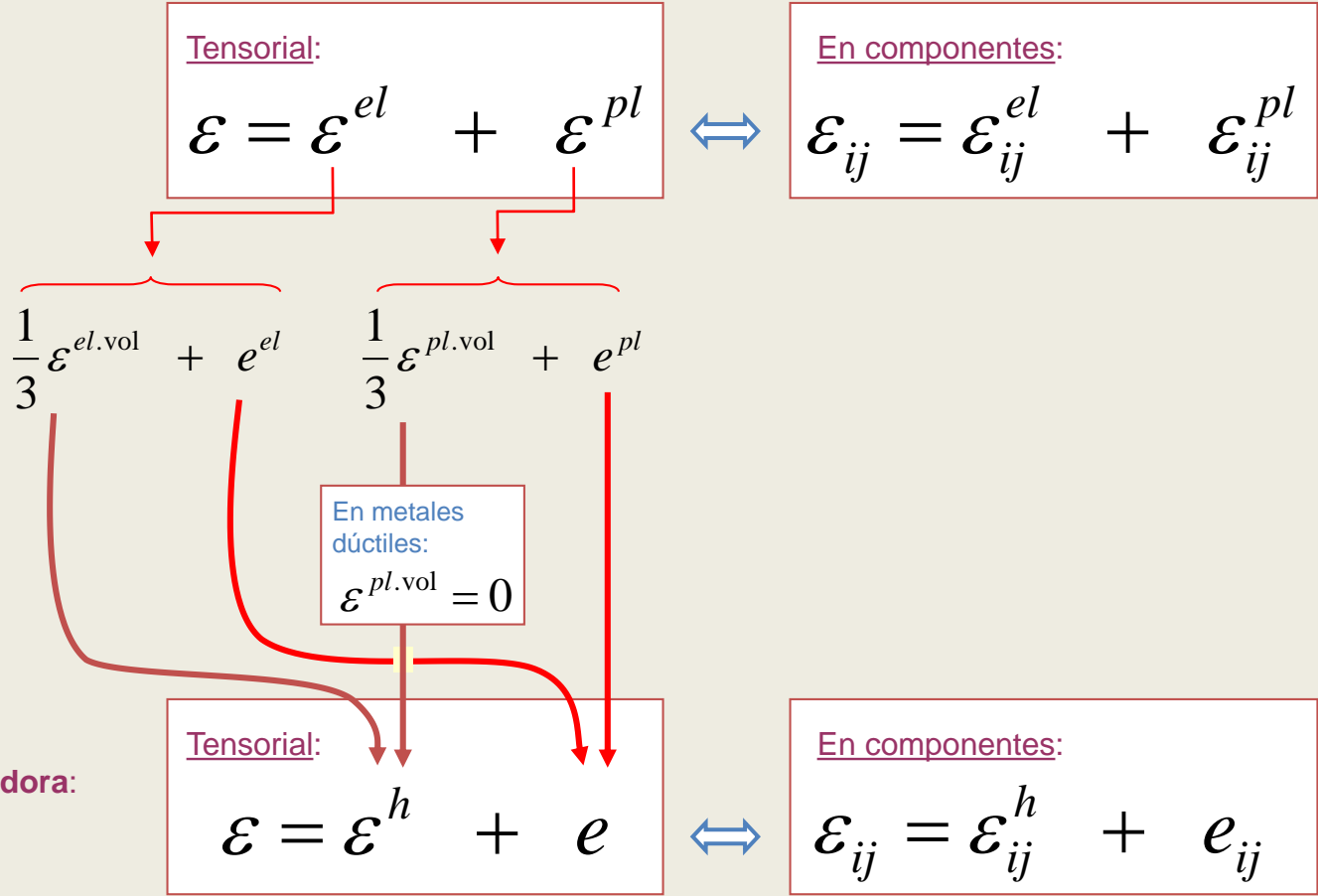
Descomposición del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en sus componentes **hidrostática** y **desviadora**:

Tensorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^h + \boldsymbol{e}$$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^h + e_{ij}$$



## 3.3.2 Descomposición aditiva del tensor de deformaciones

Consideremos el tensor de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , de componentes  $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$

Las descomposiciones aditivas anteriores también se pueden expresar como incrementos

- Descomposición del tensor **incremento de deformación** en incrementos **elásticos** y **plásticos**

Tensorial:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$$



En componentes:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^{pl}$$

- Descomposición del tensor **incremento de deformación** en incrementos **hidrostático** y **desviador**

Tensorial:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^h + d\boldsymbol{e}$$



En componentes:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^h + de_{ij}$$

Se dice que hay “**producción de deformación plástica**” durante aquellas sollicitaciones mecánicas en las que:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} \neq 0$$

### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (1/6)

Sea  $f = f(J_2 ; \sigma_Y)$  la **función de plastificación**, donde:

- $J_2$  es la **variable independiente**, asociada al estado tensional
- $\sigma_Y$  es un “**parámetro**”, se asocia a una propiedad del material

En esta condición:

{	$f < 0$	Indica que el <b>comportamiento</b> es <b>elástico</b> .
	$f = 0$	Indica que se satisface el criterio de plastificación y, por tanto, el <b>comportamiento</b> es <b>elasto-plástico</b> .
		Todo incremento de la “ <i>solicitación mecánica</i> ” en esta condición de $f = 0$ implica necesariamente <b>producción de deformación plástica</b> .

El parámetro  $\sigma_Y$  se relaciona directamente con el “**tamaño**” del **lugar de plastificación**; su valor puede cambiar con la producción de deformación plástica.

Por ejemplo, si el criterio es **von Mises**, entonces

- La **función de plastificación** es:  $f(q ; \sigma_Y) = q - \sigma_Y$
- El **criterio de plastificación** se escribe como:  $f(q ; \sigma_Y) = q - \sigma_Y = 0$

Describir el **CAMBIO DE TAMAÑO** del  
LUGAR DE PLASTIFICACIÓN



Describir la **EVOLUCIÓN** de  $\sigma_Y$  durante un proceso  
de **PRODUCCIÓN** de **DEFORMACIÓN PLÁSTICA**

### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (2/6)

---

La evolución del **límite elástico**  $\sigma_Y$  durante un proceso de producción de deformación plástica puede describirse de dos maneras:

(a) Como función del **trabajo de deformación plástica** (trabajo plástico) realizado

$$\sigma_Y = F(W_p) \quad \text{Esto se conoce como "work hardening"}$$

o bien,

(b) Como función de la **deformación plástica equivalente** sufrida por el material

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) \quad \text{Esto se conoce como "strain hardening"}$$

### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (3/6)

**Hipótesis (a)** El límite elástico como función del **trabajo plástico** realizado

$$\sigma_Y = F(W_p)$$

El trabajo plástico se obtiene acumulando (integrando) el trabajo asociado a cada incremento de deformación plástica

$$W_p = \int dW_p$$

siendo cada incremento de trabajo plástico igual a la diferencia del incremento de trabajo total (trabajo exterior) y del incremento de trabajo de deformación elástica.

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

$$dW_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e$$

$$dW_p = dW - dW_e$$

El **incremento de deformación** es expresable en términos de sus **componentes elástica y plástica**:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

resultando

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

Donde el **incremento de deformación elástica** puede obtenerse a partir de la **Ley de Hooke** generalizada:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_{ij}^h$$

### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (4/6)

**Hipótesis (a)** El límite elástico como función del **trabajo plástico** realizado

$$\sigma_Y = F(W_p)$$

Si la **tensión hidrostática NO** afecta al criterio de plastificación y, a su vez, éste es función del trabajo plástico realizado, puede considerarse que la tensión hidrostática no debe producir trabajo plástico:



!!! Todos los cambios de volumen deben ser elásticos!!!

La deformación volumétrica puede obtenerse como:

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{ii}$$

En conclusión:  $d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{ii}^e$        $d\varepsilon_{ii}^p = 0$



!!! Las deformaciones plásticas no inducen cambios de volumen!!!

Puede finalmente deducirse que:

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$



### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (5/6)

**Hipótesis (b)** El límite elástico como función de la **deformación plástica equivalente**  $\bar{\varepsilon}^p$

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$$

$\bar{\varepsilon}^p$  es una medida escalar, que es **representativa** de la **deformación plástica acumulada**, debido a sucesivas variaciones (**incrementos**) en el **tensor de deformaciones plásticas**.

Se define como:  $\bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p$  donde  $d\bar{\varepsilon}^p = + \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$

El factor 2/3 aparece para que en el caso de carga uniaxial la deformación plástica equivalente coincida con la deformación plástica en la dirección de la carga.

$d\bar{\varepsilon}^p \geq 0 \Rightarrow$

- La **def. plástica equivalente** siempre es **positiva**, y su valor aumentará aunque el tensor incremento de deformación plástica tenga componentes compresivas (negativas)
- ¡¡¡ **Todas** las componentes del **tensor incremento de deformaciones plásticas** contribuyen al endurecimiento del material !!!
- En direcciones principales, el **tensor incremento de deformaciones plásticas**, así como la condición de **incompresibilidad plástica** (en metales), se expresan como:

$$d\varepsilon^p = \begin{bmatrix} d\varepsilon_1^p & 0 & 0 \\ & d\varepsilon_2^p & 0 \\ sim & & d\varepsilon_3^p \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad d\varepsilon_{ii}^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$$

- El **incremento de deformación plástica equivalente** es:

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (d\varepsilon_1^p)^2 + (d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_3^p)^2 \right\}}$$

### 3.3.3 Hipótesis aplicables en la descripción del endurecimiento (6/6)

**Hipótesis (b)** El límite elástico como función de la **deformación plástica equivalente**  $\bar{\varepsilon}^p$

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$$

En un ensayo de **tracción simple** (en la dirección **1**):

Condición de incompresibilidad:

$$d\varepsilon_{ii}^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$$

Condición de simetría con respecto al eje 1:

$$d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p$$

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon_{ii}^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0 \\ d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p \end{array} \right\} \Rightarrow d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_1^p$$

$$\Rightarrow d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ (d\varepsilon_1^p)^2 + (d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_3^p)^2 \right\}} = |d\varepsilon_1^p|$$

$$\varepsilon_1^p = \int d\varepsilon_1^p = \int d\bar{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}^p$$

iii La función **H** es simplemente la relación **tensión vs. deformación plástica** medida en el ensayo de tracción !!!

$$\sigma_Y = H(\varepsilon_1^p)$$

Curva de endurecimiento

### 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (1/6)

Tres alternativas:

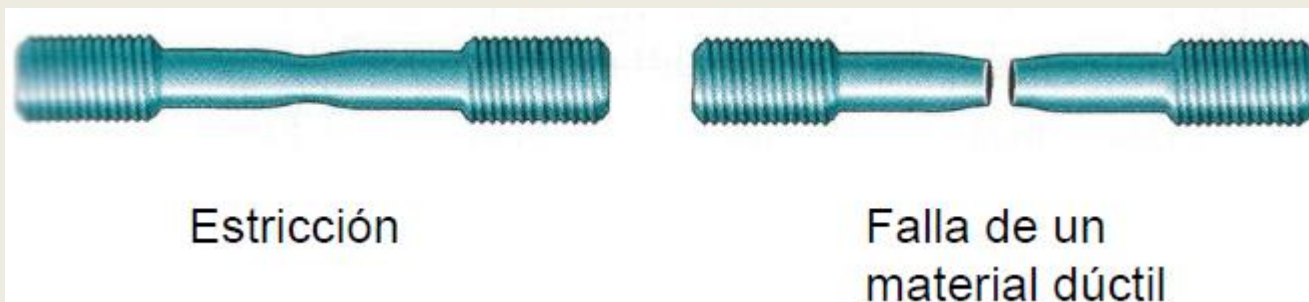
- a) Ensayo de tracción simple ←
- b) Ensayo de compresión
- c) Ensayo de torsión

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right)$$

#### a) Ensayo de tracción simple

- Se realiza en una **Máquina Universal de Ensayos**, de la que se obtiene un registro **fuerza vs. elongación**, el que es proporcional a la relación **tensión ingenieril vs. deformación ingenieril**.
- La relación **tensión ingenieril vs. deformación ingenieril** ha de ser posteriormente convertida en la relación **tensión verdadera vs. componente plástica de la deformación**, mediante un tratamiento numérico basado, usualmente, en la **hipótesis de incompresibilidad plástica**.
- El ensayo es válido mientras el campo de tensiones sea **uniforme y uni-axial** en la “**zona de calibración**” de la probeta.

**Inconveniente:** falta de uniformidad del **estado tenso-deformacional** en la probeta cuando comienza a formarse y a desarrollarse un **cuello de estricción**.



# 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (2/6)

Tres alternativas:

- a) Ensayo de tracción simple
- b) Ensayo de compresión
- c) Ensayo de torsión

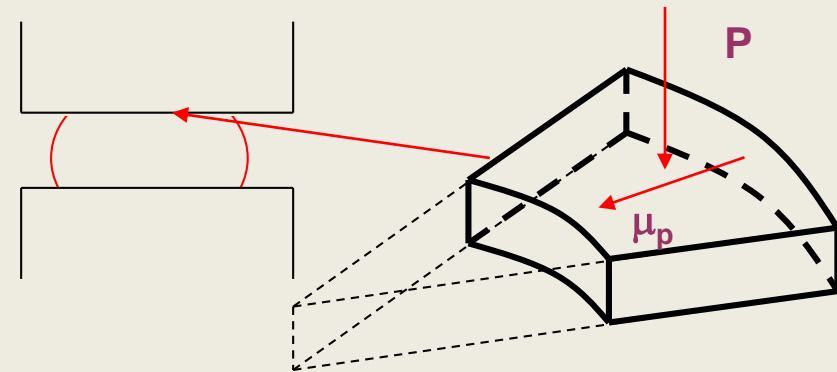
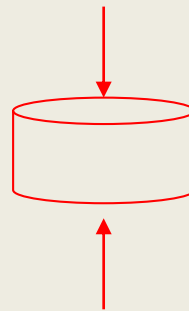
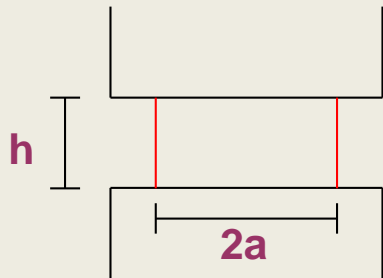


$$\sigma_Y = H(\bar{\epsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\epsilon}^p\right)$$

## b) Ensayo de compresión

Problema experimental:

el **rozamiento** entre los platos y la probeta, en conjunto con el efecto Poisson, induce un estado tensional **no uniforme y no uniaxial**.



### 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (3/6)

$$\sigma_Y = H(\bar{\epsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\epsilon}^p\right)$$

#### b) Ensayo de compresión (continuación)

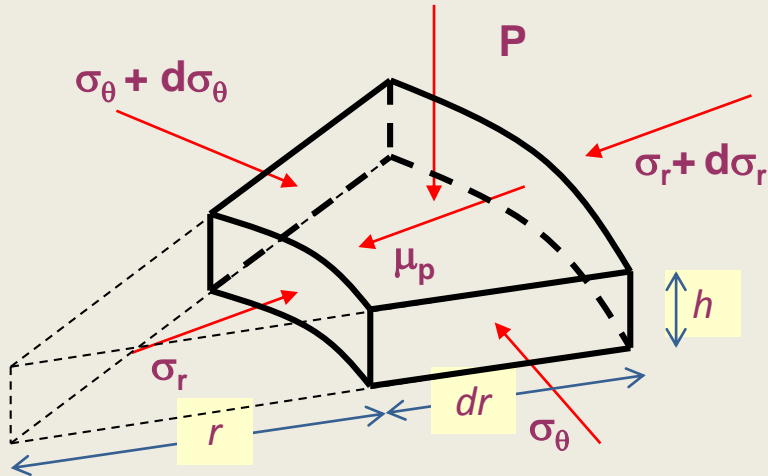
**Solución de Siebel (1923):**

El equilibrio en dirección radial de un elemento diferencial de probeta da lugar a la ecuación diferencial:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)h(r + dr)d\theta - \sigma_r h r d\theta + 2\mu_p P r d\theta dr - 2\sigma_\theta h dr \frac{d\theta}{2} = 0$$

cuya solución, si el material ha plastificado, es:

$$P = \sigma_Y e^{2\mu(a-r)/h}$$



por lo tanto:

$$P_{media} = \frac{\int_0^a 2\pi r P dr}{\pi a^2} = \left(1 + \frac{2\mu a}{3h}\right) \sigma_Y$$

$$\bar{\epsilon} = \ln \frac{h_0}{h}$$

**Procedimiento:**

$$\sigma_Y = H\left(\int d\bar{\epsilon}^p\right) \leftarrow P_m = f(h)$$

**Relación (discretizada) obtenida en el laboratorio**

### 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (4/6)

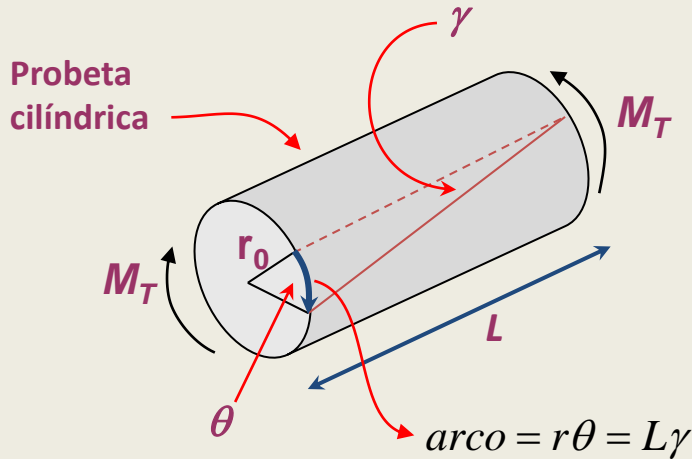
Tres alternativas:

- a) Ensayo de tracción simple
- b) Ensayo de compresión
- c) Ensayo de torsión



$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right)$$

#### c) Ensayo de torsión



#### Hipótesis:

- La longitud de la probeta no cambia
- La sección de la barra se mantiene plana
- Los radios de la barra se mantienen rectos

#### Estado tensional:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = s \Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3}\tau \\ \tau_{\max} = \tau \end{cases}$$

#### Estado deformacional:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{el} & 0 \\ \gamma^{el} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon^{el}} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{pl} & 0 \\ \gamma^{pl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon^{pl}}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{pl} \varepsilon_{ij}^{pl}} = \frac{\gamma^{pl}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\gamma - \gamma^{el}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{r_0}{L} \theta - \frac{\tau}{G} \right) \Rightarrow \bar{\varepsilon}^{pl} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{r_0}{L} \theta - \frac{\tau}{G} \right)$$

### 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (5/6)

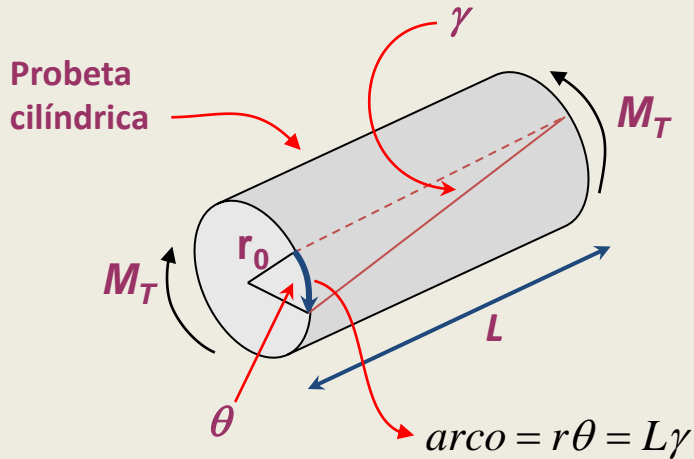
Tres alternativas:

- a) Ensayo de tracción simple
- b) Ensayo de compresión
- c) Ensayo de torsión



$$\sigma_Y = H(\bar{\epsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\epsilon}^p\right)$$

#### c) Ensayo de torsión (continuación)



Se ha relacionado  $q$  con  $\tau$ , así como  $\bar{\epsilon}^{pl}$  con  $\theta$  y  $\tau$ .

→ ¡¡ Sólo falta relacionar  $\tau$  con  $M_T$  !!

El momento torsor total aplicado en el ensayo  $M_T$ , se obtiene por integración en la sección transversal:

$$M_T = \int_0^{r_0} \tau r 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{r_0} \tau r^2 dr = 2\pi \left(\frac{L}{\theta}\right)^3 \int_0^{\gamma_0} \tau \gamma^2 d\gamma$$

Derivando esta expresión y teniendo en cuenta que  $\gamma_0 = \frac{r_0}{L}\theta$ , se obtiene:

$$\tau = \frac{1}{2\pi r_0^3} \left( 3M_T + \theta \frac{dM_T}{d\theta} \right)$$

### 3.3.4 Caracterización: obtención experimental de la función $H$ (6/6)

Tres alternativas:

- a) Ensayo de tracción simple
- b) Ensayo de compresión
- c) Ensayo de torsión



$$\sigma_Y = H(\bar{\epsilon}^p) = H\left(\int d\bar{\epsilon}^p\right)$$

#### c) Ensayo de torsión (continuación)

#### Resumen de expresiones:

$$\tau = \frac{1}{2\pi r_0^3} \left( 3M_T + \theta \frac{dM_T}{d\theta} \right)$$

$$\sigma_Y = q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3}\tau$$

↳ Si se usa el crit. de plast. de **Von Mises**

$$\sigma_Y = 2\tau_{\max} = 2\tau$$

↳ Si se usa el crit. de plast. de **Tresca**

$$\bar{\epsilon}^{pl} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{r_0}{L} \theta - \frac{\tau}{G} \right)$$

#### Procedimiento:

- El ensayo proporciona directamente una tabla de  $N$  puntos experimentales  $\left[ \theta^{(k)}, M_T^{(k)} \right]_{k=1, \dots, N}$
- Mediante tratamiento numérico se obtiene una tabla de valores para la derivada  $\left[ \frac{dM_T}{d\theta} \right]_{k=1, \dots, N}$
- A partir de lo anterior, y en conjunto con las expresiones deducidas anteriormente, se obtiene la tabla  $\left[ \bar{\epsilon}^{pl(k)}, \tau^{(k)} \right]_{k=1, \dots, N}$
- Seleccionando un **Criterio de Plastificación**, se obtiene finalmente la tabla:

$$\left[ \bar{\epsilon}^{pl(k)}, \sigma_Y^{(k)} \right]_{k=1, \dots, N}$$

que es una versión "tabular" de la función de endurecimiento  $H$ :

$$\sigma_Y = H(\bar{\epsilon}^p)$$



## Resumen de NOMENCLATURA

$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor de tensiones (9 componentes, 6 de ellas independientes)
$\boldsymbol{s}, s_{ij}$	Tensor de tensiones desviadoras
$\sigma_Y$	Límite elástico medido en tensión uniaxial (escalar)
$q$	Tensión equivalente de von Mises (escalar)
$p, \bar{\sigma}$	Presión hidrostática (escalar), tensión hidrostática: $p = -\bar{\sigma}$
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Tensor de deformaciones plásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_{ij}^e$	Tensor de deformaciones elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{ij}^p$	Tensor de deformaciones plásticas
$d\boldsymbol{\varepsilon}^p, d\varepsilon_{ij}^p$	Tensor incremento de deformaciones plásticas
$d\bar{\varepsilon}^p$	Incremento de deformación plástica equivalente (es un escalar no negativo)
$\bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p$	Deformación plástica equivalente o acumulada (es un escalar no negativo)
$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^p)$	$H$ es la función de endurecimiento en la hipótesis de “strain hardening”
$\sigma_Y = F(W^p)$	$F$ es la función de endurecimiento en la hipótesis de “work hardening”